

TIM-1 - ESTUDOS POPULACIONAIS

Texto retirado e adaptado de:

Von Sperling, M. (2014). Princípios do tratamento biológico de águas residuárias. Vol. 1. Introdução à qualidade das águas e ao tratamento de esgotos. Editora UFMG. 4ª ed., 472 p.

Os principais métodos utilizados para as projeções populacionais são (Fair et al, 1968; CETESB, 1978; Barnes et al, 1981; Qasim, 1985; Metcalf & Eddy, 1991; Alem Sobrinho e Tsutiya, 1999; Tsutiya, 2004):

- *crescimento aritmético*
- *crescimento geométrico*
- *regressão multiplicativa*
- *taxa decrescente de crescimento*
- *curva logística*
- *comparação gráfica entre cidades similares*
- *método da razão e correlação*
- *previsão com base nos empregos*

Os Quadros 1 e 2 listam as principais características dos diversos métodos. Todos os métodos apresentados no Quadro 1 podem ser resolvidos também através da análise estatística da regressão (linear ou não linear). Estes métodos são encontrados em um grande número de programas de computador comercialmente disponíveis, incluindo planilhas eletrônicas (no Excel, ferramenta Solver). Sempre que possível, deve-se adotar a análise da regressão, que permite a incorporação de uma maior série histórica, ao invés de apenas 2 ou 3 pontos, como nos métodos algébricos apresentados no Quadro 1.

Os resultados da projeção populacional devem ser coerentes com a densidade populacional da área em questão (atual, futura ou de saturação). Os dados de densidade populacional são ainda úteis no cômputo das vazões e cargas advindas de determinada área ou bacia da cidade. Valores típicos de densidades populacionais estão apresentados no Quadro 3. Já o Quadro 4 apresenta valores típicos de densidades populacionais de **saturação**, em regiões metropolitanas altamente ocupadas (dados baseados na Região Metropolitana de São Paulo).

No caso específico do TIM-1, a população de saturação deverá ser previamente calculada, tendo por base o planejamento físico-territorial, as densidades de saturação (hab/ha) previstas para cada setor, segundo seu zoneamento, e as áreas (ha) de cada setor. Portanto, a população de saturação não deverá ser calculada pelas equações apresentadas para os métodos de crescimento logístico e de taxa de crescimento decrescente, mas por esta abordagem mais simplificada e prática, de associação com o planejamento proposto.

Quadro 1. Projeção populacional. Métodos com base em fórmulas matemáticas.

Método	Descrição	Forma da curva	Taxa de crescimento	Fórmula da projeção	Coefficientes (se não for efetuada análise da regressão)
<i>Projeção aritmética</i>	Crescimento populacional segundo uma taxa constante. Método utilizado para estimativas de menor prazo. O ajuste da curva pode ser também feito por análise da regressão.		$\frac{dP}{dt} = K_a$	$P_t = P_0 + K_a \cdot (t - t_0)$	$K_a = \frac{P_2 - P_0}{t_2 - t_0}$
<i>Projeção geométrica</i>	Crescimento populacional função da população existente a cada instante. Utilizado para estimativas de menor prazo. O ajuste da curva pode ser também feito por análise da regressão.		$\frac{dP}{dt} = K_g \cdot P$	$P_t = P_0 \cdot e^{K_g \cdot (t - t_0)}$ ou $P_t = P_0 \cdot (1 + i)^{(t - t_0)}$	$K_g = \frac{\ln P_2 - \ln P_0}{t_2 - t_0}$ ou $i = e^{K_g} - 1$
<i>Taxa decrescente de crescimento</i>	Premissa de que, na medida em que a cidade cresce, a taxa de crescimento torna-se menor. A população tende assintoticamente a um valor de saturação. Os parâmetros podem ser também estimados por regressão não linear.		$\frac{dP}{dt} = K_d \cdot (P_s - P)$	$P_t = P_0 + (P_s - P_0) \cdot [1 - e^{-K_d \cdot (t - t_0)}]$	$P_s = \frac{2 \cdot P_0 \cdot P_1 \cdot P_2 - P_1^2 \cdot (P_0 + P_2)}{P_0 \cdot P_2 - P_1^2}$ $K_d = \frac{-\ln[(P_s - P_2)/(P_s - P_0)]}{t_2 - t_0}$
<i>Crescimento logístico</i>	O crescimento populacional segue uma relação matemática, que estabelece uma curva em forma de S. A população tende assintoticamente a um valor de saturação. Os parâmetros podem ser também estimados por regressão não linear. Condições necessárias: $P_0 < P_1 < P_2$ e $P_0 \cdot P_2 < P_1^2$. O ponto de inflexão na curva ocorre no tempo $[t_0 - \ln(c)/K_1]$ e com $P_t = P_s/2$. Para aplicação das fórmulas, os dados devem ser equidistantes no tempo.		$\frac{dP}{dt} = K_1 \cdot P \cdot \left(\frac{P_s - P}{P_s} \right)$	$P_t = \frac{P_s}{1 + c \cdot e^{-K_1 \cdot (t - t_0)}}$	$P_s = \frac{2 \cdot P_0 \cdot P_1 \cdot P_2 - P_1^2 \cdot (P_0 + P_2)}{P_0 \cdot P_2 - P_1^2}$ $c = (P_s - P_0)/P_0$ $K_1 = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \ln \left[\frac{P_0 \cdot (P_s - P_1)}{P_1 \cdot (P_s - P_0)} \right]$

Fonte: adaptado parcialmente de Qasim (1985)

- dP/dt = taxa de crescimento da população em função do tempo
- P_0, P_1, P_2 = populações nos anos t_0, t_1, t_2 (as fórmulas para taxa decrescente e crescimento logístico exigem valores equidistantes, caso não sejam baseadas na análise da regressão) (hab)
- P_t = população estimada no ano t (hab) ; P_s = população de saturação (hab)
- K_a, K_g, K_d, K_1, i, c = coeficientes (a obtenção dos coeficientes pela análise da regressão é preferível, já que se pode utilizar toda a série de dados existentes, e não apenas P_0, P_1 e P_2)

Quadro 2. Projeções populacionais com base em métodos de quantificação indireta

Método	Descrição
<i>Comparação gráfica</i>	O método envolve a projeção gráfica dos dados passados da população em estudo. Os dados populacionais de outras cidades similares, porém maiores, são plotados de tal maneira que as curvas sejam coincidentes no valor atual da população da cidade em estudo. Estas curvas são utilizadas como referências na projeção futura da cidade em questão.
<i>Razão e correlação</i>	Assume-se que a população da cidade em estudo possui a mesma tendência da região (região física ou política) na qual se encontra. Com base nos registros censitários a <u>razão</u> "população da cidade/população da região" é calculada, e projetada para os anos futuros. A população da cidade é obtida a partir da projeção populacional da região (efetuada em nível de planejamento por algum outro órgão) e da razão projetada.
<i>Previsão de empregos e serviços de utilidades</i>	A população é estimada utilizando-se a previsão de empregos (efetuada por algum outro órgão). Com base nos dados passados da população e pessoas empregadas, calcula-se a relação "emprego/população", a qual é projetada para os anos futuros. A população da cidade é obtida a partir da projeção do número de empregos da cidade. O procedimento é similar ao método da razão. Pode-se adotar a mesma metodologia a partir da previsão de serviços de utilidade, como eletricidade, água, telefone etc. As companhias de serviços de utilidade normalmente efetuam estudos e projeções da expansão de seus serviços com relativa confiabilidade.

Fonte: Qasim (1985)

Nota: a projeção futura das relações pode ser feita com base na análise da regressão

Quadro 3. Densidades populacionais típicas em função do uso do solo

Uso do solo	Densidade populacional	
	(hab/ha)	(hab/km ²)
Áreas residenciais		
Residências unifamiliares; lotes grandes	12 – 36	1.200 – 3.600
Residências unifamiliares; lotes pequenos	36 – 90	3.600 – 9.000
Residências multifamiliares; lotes pequenos	90 – 250	9.000 – 25.000
Apartamentos	250 – 2.500	25.000 – 250.000
Áreas comerciais sem predominância de prédios	36 – 75	3.600 – 7.500
Áreas industriais	12 – 36	1.200 – 3.600
Total (excluindo-se parques e outros equipamentos de grande porte)	25 – 125	2.500 – 12.500

Nota: referência estrangeira, em que o padrão de ocupação pode ser diferente do brasileiro

Fonte: adaptado de Fair, Geyer e Okun (1973) e Qasim (1985) (valores arredondados)

Quadro 4. Densidades demográficas e extensões médias de arruamentos por ha, em condições de saturação, em regiões metropolitanas altamente ocupadas

Uso do solo	Densidade populacional de saturação (hab/ha)	Extensão média de arruamentos (m/ha)
Bairros residenciais de luxo, com lote padrão de 800 m ²	100	150
Bairros residenciais médios, com lote padrão de 450 m ²	120	180
Bairros residenciais populares, com lote padrão de 250 m ²	150	200
Bairros mistos residencial-comercial da zona central, com predominância de prédios de 3 e 4 pavimentos	300	150
Bairros residenciais da zona central, com predominância de edifícios de apartamentos com 10 e 12 pavimentos	450	150
Bairros mistos residencial-comercial –industrial da zona urbana, com predominância de comércio e indústrias artesanais e leves	600	150
Bairros comerciais da zona central com predominância de edifícios de escritórios	1000	200

Dados médios da Região Metropolitana de São Paulo

Fonte: Alem Sobrinho e Tsutiya (1999)

Ao se fazer as projeções populacionais, deve-se ter em mente os seguintes pontos:

- Os estudos de projeção populacional são normalmente bastante complexos. Devem ser analisadas todas as variáveis (infelizmente nem sempre quantificáveis) que possam interagir na localidade específica em

análise. Ainda assim podem ocorrer eventos inesperados que mudem totalmente a trajetória prevista para o crescimento populacional. Isto ressalta a necessidade do estabelecimento de um valor realístico para o horizonte de projeto, assim como da implantação da estação em etapas.

- As sofisticadas matemáticas associadas às determinações dos parâmetros de algumas equações de projeção populacional perdem o sentido se não forem embasadas por informações paralelas, na maioria das vezes não quantificáveis, como aspectos sociais, econômicos, geográficos, históricos etc.
- O bom senso do analista é de grande importância na escolha do método de projeção a ser adotado e na interpretação dos resultados. Ainda que a escolha possa se dar tendo por base o melhor ajuste aos dados censitários disponíveis, a extrapolação da curva exige percepção e cautela.
- Os últimos dados censitários no Brasil têm indicado uma tendência geral (naturalmente que com exceções localizadas) de redução nas taxas anuais de crescimento populacional.
- É interessante considerar-se a inclusão de uma certa margem de segurança na estimativa, no sentido de que as populações reais futuras não venham, a menos de alguma forte causa imprevisível, facilmente ultrapassar a população de projeto estimada, induzindo a precoces sobrecargas no sistema implantado.

Apresenta-se a seguir um exemplo de cálculo para a projeção populacional de uma comunidade. O exemplo é baseado na situação mais comum de que a localidade já é existente e, portanto, há dados censitários disponíveis (no exemplo, para os anos 1980, 1990 e 2000).

No caso específico do TIM-1, a ocupação ocorrerá apenas no futuro e, obviamente, não há dados censitários. Assim, os anos que devem ser inseridos nos cálculos são anos genéricos, como, por exemplo, anos 0, 10 e 20, ou anos futuros como, por exemplo, 2020, 2030 e 2040. A população associada a cada um destes anos futuros deverá ser aquela que o grupo acredita que poderá refletir bem a tendência de crescimento da população na área de planejamento. Poderão ser utilizadas taxas de crescimento de outras áreas que tiveram um crescimento similar ao que o grupo acredita que poderá ocorrer na área de planejamento. O grupo poderá experimentar diferentes valores e poderá compor cenários diferentes, tais como: Cenário de crescimento lento, Cenário de crescimento intermediário, Cenário de crescimento rápido. A interpretação dos gráficos das projeções populacionais resultantes é bastante importante, para que o grupo reflita se ela representa bem a trajetória mentalizada para a área.

Conforme comentado anteriormente, a população de saturação deverá ser previamente definida, com base no planejamento físico-territorial, e não calculada, tal como mostrado no exemplo, o qual é baseado em uma localidade já existente.

Exemplo 1

Com base nos dados censitários apresentados a seguir, fazer a projeção populacional, utilizando-se os métodos baseados em fórmulas matemáticas (Quadro 1). Dados:

Ano	População (hab)
1980	10.585
1990	23.150
2000	40.000

Solução:

a) Nomenclatura dos anos e populações

De acordo com o Quadro 2.1, tem-se a seguinte nomenclatura:

$$\begin{aligned}t_0 &= 1980 & P_0 &= 10.585 \text{ hab} \\t_1 &= 1990 & P_1 &= 23.150 \text{ hab} \\t_2 &= 2000 & P_2 &= 40.000 \text{ hab}\end{aligned}$$

b) Projeção aritmética

$$K_a = \frac{P_2 - P_0}{t_2 - t_0} = \frac{40000 - 10585}{2000 - 1980} = 1470,8$$

$$P_t = P_0 + K_a \cdot (t - t_0) = 10585 + 1470,8 \times (t - 1980)$$

Para se calcular a população do ano 2005, por exemplo, deve-se substituir t por 2005 na equação acima. Para o ano 2010, t = 2010, e assim por diante.

c) Projeção geométrica

$$K_g = \frac{\ln P_2 - \ln P_0}{t_2 - t_0} = \frac{\ln 40000 - \ln 10585}{2000 - 1980} = 0,0665$$

$$P_t = P_0 \cdot e^{K_g \cdot (t - t_0)} = 10585 \cdot e^{0,0665 \times (t - 1980)}$$

d) Taxa decrescente de crescimento

$$P_s = \frac{2 \cdot P_0 \cdot P_1 \cdot P_2 - P_1^2 \cdot (P_0 + P_2)}{P_0 \cdot P_2 - P_1^2} = \frac{2 \times 10585 \times 23150 \times 40000 - 23150^2 \times (10585 + 40000)}{10585 \times 40000 - 23150^2} = 66709$$

A população de saturação é, portanto, 66.709 hab.

$$K_d = \frac{-\ln[(P_s - P_2)/(P_s - P_0)]}{t_2 - t_0} = \frac{-\ln[(66709 - 40000)/(66709 - 10585)]}{2000 - 1980} = 0,0371$$

$$P_t = P_0 + (P_s - P_0) \cdot [1 - e^{-K_d \cdot (t - t_0)}] = 10585 + (66709 - 10585) \times (1 - e^{-0,0371 \times (t - 1980)})$$

e) Crescimento logístico

$$P_s = \frac{2 \cdot P_0 \cdot P_1 \cdot P_2 - P_1^2 \cdot (P_0 + P_2)}{P_0 \cdot P_2 - P_1^2} = \frac{2 \times 10585 \times 23150 \times 40000 - 23150^2 \times (10585 + 40000)}{10585 \times 40000 - 23150^2} = 66709$$

$$c = \frac{(P_s - P_0)}{P_0} = \frac{(66709 - 10585)}{10585} = 5,3022$$

$$K_1 = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \ln \left[\frac{P_0 \cdot (P_s - P_1)}{P_1 \cdot (P_s - P_0)} \right] = \frac{1}{2000 - 1990} \cdot \ln \left[\frac{10585 \times (66709 - 23150)}{23150 \times (66709 - 10585)} \right] = -0,1036$$

$$P_t = \frac{P_s}{1 + c \cdot e^{K_1 \cdot (t - t_0)}} = \frac{66709}{1 + 5,3022 \cdot e^{-0,1036 \times (t - 1980)}}$$

O ponto de inflexão na curva ocorre no seguinte ano e com a seguinte população:

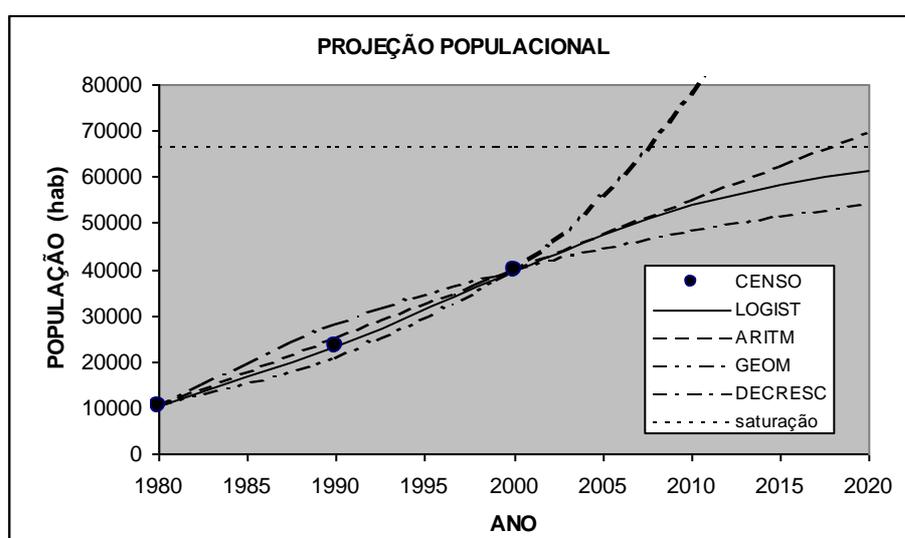
$$\text{Tempo inflexão} = t_0 - \frac{\ln(c)}{K_1} = 1980 - \frac{\ln(5,3022)}{-0,1036} = 1996$$

$$\text{População inflexão} = \frac{P_s}{2} = \frac{66709}{2} = 33354 \text{ hab}$$

Antes do ponto de inflexão (ano de 1996), o crescimento populacional apresenta uma taxa crescente e, após este, uma taxa decrescente.

f) Resultados na forma de tabela e gráfico

Nomenclatura	Ano	População medida (censo)	População estimada			
			Aritmética	Geométrica	Decrescente	Logística
P0	1980	10.585	10.585	10.585	10.585	10.585
P1	1990	23.150	25.293	20.577	27.992	23.150
P2	2000	40.000	40.000	40.000	40.000	40.000
-	2005	-	47.354	55.770	44.525	47.725
-	2010	-	54.708	77.758	48.284	53.930
-	2015	-	62.061	108.414	51.405	58.457
-	2020	-	69.415	151.157	53.998	61.534



Projeção populacional. Dados medidos e estimados

Pelo gráfico e pela tabela, observam-se os seguintes pontos, específicos para este conjunto de dados:

- Os dados observados (populações dos anos 1980 a 2000) apresentam uma tendência crescente de crescimento. Visualmente, observa-se que o modelo da taxa decrescente não se ajusta bem a esta taxa crescente.
- A projeção geométrica conduz a valores estimados futuros bastante elevados (que poderão vir a ser ou não verdadeiros, mas que se afastam bastante das demais projeções).
- Os métodos logísticos e de taxa decrescente tendem à população de saturação (66.709 hab, indicada no gráfico).
- Em todos os métodos, os valores calculados da população nos anos P₀ e P₂ são iguais aos valores medidos, uma vez que estas populações foram utilizadas para o cálculo dos coeficientes.
- A projeção populacional propriamente dita é apenas após o ano 2000. Os anos com dados censitários são plotados no gráfico, para permitir uma visualização do ajuste de cada curva aos dados observados (1980, 1990 e 2000).
- A curva de melhor ajuste aos dados observados pode ser selecionada por meio de métodos estatísticos, que dêem uma indicação do erro (normalmente expresso na forma da soma dos quadrados dos erros), onde o erro é a diferença entre o dado estimado e o dado observado (ver item g a seguir).

g) Solução do problema utilizando a ferramenta Solver, do Excel

A ferramenta Solver, do Excel[®], pode ser empregada para a análise da regressão não linear. Caso ela não esteja disponível, usar o comando Opções – Suplementos – Solver (marcar esta opção). O objetivo é se obter o menor erro (ou resíduo) possível, onde o erro é a diferença entre a população observada (censo) e a estimada pelo modelo. Como o erro pode ser positivo ou negativo, trabalha-se com o erro elevado ao quadrado, para que se tenha um valor sempre positivo. O ajuste para um determinado modelo será o melhor quando a soma dos quadrados dos erros for a mínima possível. O Solver efetua a busca dos valores ótimos dos coeficientes do modelo, de forma a encontrar o mínimo da soma dos quadrados dos erros.

Ao se fazer a análise da regressão não linear, pode-se ter um número de dados maior do que três. Ademais, os dados não necessitam estar equidistantes.

No presente exemplo, assume-se que há também dados censitários para o ano de 1970 (ao todo, 4 dados censitários). Além disso, um dos dados é para o ano de 1991, ao invés de 1990 (os dados não são equidistantes).

Novos dados de entrada:

Ano	Pop (hab)
1970	3000
1980	10585
1991	24000
2000	40000

A seguir é apresentada a planilha Excel, após convergência do Solver. Nesta planilha, apenas o modelo logístico foi utilizado. No entanto, qualquer outro modelo pode ser empregado, após as devidas adaptações. As adaptações são apenas nas células que contêm os coeficientes do modelo (no caso, células B18 a B20 – em outros modelos, pode haver apenas 2 coeficientes, ou seja, apenas 2 células) e as equações do modelo (no caso, células D25 a D32). As equações apresentadas nestas células são as equações do modelo logístico (Quadro 1, coluna Fórmula da Projeção). Parte da planilha é rerepresentada mais abaixo, exibindo as fórmulas utilizadas. Naturalmente que os resultados obtidos são diferentes dos calculados acima, uma vez que os dados de entrada foram também parcialmente modificados.

Sempre que se trabalha com regressão não linear, deve-se ter o cuidado de se interpretar a consistência de cada coeficiente e valor obtido. Por exemplo, caso se obtivesse um valor da população de saturação negativa, tal obviamente não teria o menor significado físico. No Solver, podem ser introduzidas restrições, tais como $P_s > 0$ (na planilha, célula B18 > 0), ou $P_s > P_3$ (célula B18 > C11).

	A	B	C	D	E	F	G	
1	PROJECAO POPULACIONAL							
2	Regressão não linear, utilizando a ferramenta SOLVER							
3								
4	Preencher as células dos dados censitários (não necessitam ser equidistantes)							
5								
6	DADOS CENSITARIOS							
7	ANO POPULACAO							
8	P0	1970	3000					
9	P1	1980	10585					
10	P2	1991	24000					
11	P3	2000	40000					
12								
13	COEFICIENTES							
14	As células abaixo são os coeficientes do modelo, a serem estimados pelo SOLVER							
15	As células deverão ter valores digitados inicialmente, para que o SOLVER possa modificá-los.							
16								
17	LOGISTICA							
18	Ps	65392						
19	c	16,5803						
20	K1	-0,1086						
21								
22	PROJECAO POPULACIONAL							
23		População (hab)				Quadrados dos erros		
24		ANO	Censo	Estimada		(Pop censo - Pop estim)^2		
25	P0	1970	3000	3720		517874		
26	P1	1980	10585	9914		450369		
27	P2	1991	24000	24270		73145		
28	P3	2000	40000	39935		4201		
29	Projeção futura	2005		47720				
30		2010		53814				
31		2015		58127				
32		2020		60965				
33								
34						Soma (Pop censo - Pop estim)^2 =	1045588	
35								
36	SOLVER:							
37	Definir célula de destino: célula com o valor da soma dos quadrados dos erros							
38	Igual a: Min (o objetivo é minimizar a soma dos quadrados dos erros)							
39	Células variáveis: células com os coeficientes do modelo em análise (células com valores de Ps, c, K1)							
40	Para o modelo logístico, caso a população de saturação (Ps) tenha sido fixada com base em							
41	densidade populacional, apenas os coeficientes K1 e c devem ser calculados pelo Solver							

Parte da planilha acima, com as respectivas fórmulas

	B	C	D	E	F	
23	População (hab)				Quadrados dos erros	
24	ANO	Censo	Estimada		(Pop censo - Pop estim)^2	
25	=B8	=C8	=(B\$18/(1+B\$19*EXP(B\$20*(B25-B\$8))))		=(C25-D25)^2	
26	=B9	=C9	=(B\$18/(1+B\$19*EXP(B\$20*(B26-B\$8))))		=(C26-D26)^2	
27	=B10	=C10	=(B\$18/(1+B\$19*EXP(B\$20*(B27-B\$8))))		=(C27-D27)^2	
28	=B11	=C11	=(B\$18/(1+B\$19*EXP(B\$20*(B28-B\$8))))		=(C28-D28)^2	
29	=B28+5		=(B\$18/(1+B\$19*EXP(B\$20*(B29-B\$8))))			
30	=B29+5		=(B\$18/(1+B\$19*EXP(B\$20*(B30-B\$8))))			
31	=B30+5		=(B\$18/(1+B\$19*EXP(B\$20*(B31-B\$8))))			
32	=B31+5		=(B\$18/(1+B\$19*EXP(B\$20*(B32-B\$8))))			
33						
34					Soma (Pop censo - Pop estim)^2 =	=SOMA(F25:F28)
35						